2 Statische Spiele mit vollständiger Information

Literaturhinweise zu Kapitel 2:

- Osborne (2004), Kapitel 2-4
- Gibbons (1992), Kapitel 1
- MasColell, Whinston, Green (1995), Kapitel 7 und 8
- Fudenberg und Tirole (1991), Kapitel 1 und 2

2.1 Ein Bei-Spiel

Auf einem Duopolmarkt muss jede der beiden Firmen entscheiden, ob sie einen hohen oder einen niedrigen Preis verlangt. Die Entscheidung wird gleichzeitig getroffen.

- Wenn beide Firmen den hohen Preis wählen, machen beide einen Gewinn von jeweils 2 Mio Euro.
- Wenn eine Firma einen hohen Preis und die anderen einen niedrigen Preis wählt, macht die Firma mit dem niedrigen Preis einen Gewinn von 3 Mio Euro und die mit dem hohen Preis einen Gewinn von 0 Euro.
- Wenn beide Firmen den niedrigen Preis wählen, machen beide einen Gewinn von 1 Mio Euro.

2.2 Die “Normalform” eines Spieles

Wir wollen ein Spiel mit simultanen Zügen etwas genauer beschreiben. Es besteht aus:

1) Einer **Menge von Spielern**

$$\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

2) Einer **Menge von möglichen Strategien für jeden Spieler**

$$S_i,\ i \in \mathcal{I},\ \text{with } s_i \in S_i$$

Ein Profil von Strategien für alle Spieler ist ein Vektor

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \times_{i=1}^{n} S_i \ .$$

Manchmal ist es nützlich, diesen Vektor zu schreiben als:

$$s = (s_i, s_{-i}) \in (S_i, S_{-i}) \ ,$$

wobei s_{-i} der Vektor der Startegien aller übrigen Spieler (außer Spieler i) ist.

3) Einer **Auszahlungsfunktion für jeden Spieler**

$$u_i :\ S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to I\!R \ ,$$

die jedem möglichen Strategienprofil eine Auszahlung für jeden Spieler zuordnet.

Definition 2.1 (Normalform) *Die Normalform eines Spiels* $G = \{\mathcal{I}; S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ *spezifiziert*

1) die Menge der Spieler, $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$*,*

2) die Strategienräume $S_1, \ldots, S_n$*,*

3) die Nutzenfunktionen $u_1, \ldots, u_n$*.*

Ein Normalformspiel mit nur zwei Spielern und endlich vielen Strategien kann in einer Bimatrix dargestellt und analysiert werden:

1 \ 2	H	N
H	2, 2	0, 3
N	3, 0	1, 1

Abb. 2.1: Duopolmarkt

Bemerkungen:

1) Bei einem statischen Spiel ist nicht entscheidend, dass die Spieler simultan handeln. Entscheidend ist, dass kein Spieler weiß, welche Strategien die anderen Spieler gewählt haben, wenn er selbst am Zug ist.

2) Wir werden im folgenden grundsätzlich annehmen, dass die Auszahlungen der Spieler durch von Neumann-Morgensternsche Nutzenfunktionen beschrieben werden. Eine solche Nutzenfunktion ordnet jedem möglichen Ergebnis der Interaktion und damit jedem möglichen Strategientupel $(s_1, \ldots, s_n)$ einen Nutzenwert zu, der nicht nur die ordinalen Präferenzen über die Ergebnisse, sondern auch die Risikopräferenzen eines Spielers reflektiert. Sie ist eindeutig bis auf eine positive lineare Transformation. Bei Unsicherheit über das Ergebnis ist die Auszahlung gleich dem Erwartungswert der Nutzenfunktion.

3) In einem Spiel mit vollständiger Information sind sowohl die Struktur des Spiels als auch die Auszahlungen **"common knowledge"** (gemeinsames Wissen).

4) Die Normalform eines Spiels wird oft auch die "strategische Form" genannt, im Gegensatz zur "extensiven Form" eines Spiels, die wir bei dynamischen Spielen kennenlernen werden.

2.3 Dominanz

Definition 2.2 (Streng dominierte Strategie) *Eine Strategie $\hat{s}_i$ von Spieler i wird streng dominiert, wenn es eine andere Strategie $\tilde{s}_i \in S_i$ gibt, so dass $\tilde{s}_i$ zu einer streng größeren Auszahlung führt als $\hat{s}_i$, ganz gleich welches Strategientupel von den Gegenspielern gewählt wird:*

$$u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) < u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i} \ .$$

Ein rationaler Spieler wird niemals eine streng dominierte Strategie spielen!

Definition 2.3 (Dominante Strategie) *Die Strategie s_i^* von Spieler i ist eine dominante Strategie, falls sie alle anderen Strategien von Spieler i streng dominiert. D.h., eine dominante Strategie ist eine streng beste Antwort gegen alle Strategientupel s_{-i}:*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \ \ \forall s_i \in S_i \backslash \{s_i^*\}, s_{-i} \in S_{-i}.$$

Wenn eine dominante Strategie s_i^* existiert, wird sie ein rationaler Spieler immer wählen. Ganz gleich, was er über das Verhalten seiner Gegenspieler annimmt, s_i^* ist immer optimal. Daraus folgt:

Satz 2.1 *Wenn in $G = \{\mathcal{I}, S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ jeder Spieler i eine dominante Strategie hat, und alle Spieler rational sind, dann gibt es ein* **Gleichgewicht in dominanten Strategien**.

Bemerkungen:

1) Dieser Satz verlangt nur, dass jeder Spieler rational ist. Er verlangt nicht, dass jeder Spieler weiß, dass seine Gegenspieler rational sind.

2) Im Duopolspiel ist es für beide Spieler eine dominante Strategie, den niedrigen Preis zu wählen.

3) Das Duopolspiel hat die Sturktur eines "Gefangenendilemmas".

4) Obwohl die Vorhersage "Ein Spieler wird seine dominante Strategie spielen, wenn eine solche existiert" fast trivial ist, scheint sie von tatsächlichen Wirtschaftssubjekten gelegentlich verletzt zu werden. Aber:
   - Wurden die Auszahlungen richtig spezifiziert?
   - Wurde die Spielstruktur richtig spezifiziert? Zum Beispiel, gibt es wiederholte Interaktion?

5) Die meisten Spiele haben kein Gleichgewicht in dominanten Strategien. Was soll ein Spieler dann tun?

2.4 Iterierte Eliminierung von streng dominierten Strategien, Rationalisierbarkeit

Betrachten Sie das folgende Spiel:

1 \ 2	Links	Mitte	Rechts
Oben	1, 0	1, 2	0, 1
Unten	0, 3	0, 1	2, 0

Abb. 2.2: Iterierte Elimination streng dominierter Strategien

"Rechts" wird streng dominiert durch "Mitte"

- ⇒ Ein rationaler Spieler 2 wird "Rechts" nicht wählen.
- ⇒ Wenn Spieler 1 weiß, dass Spieler 2 rational ist, kann er "Rechts" eliminieren. Dann ist für ihn "Unten" streng dominiert.
- ⇒ Wenn Spieler 2, weiß, dass Spieler 1 rational ist und dass Spieler 1 weiß, dass 2 rational ist, kann er "Unten" eliminieren. Dann ist für ihn "Links" streng dominiert.
- ⇒ ("Oben", "Mitte") wird gespielt.

Bemerkungen:

1) Iterierte Elimination von streng dominierten Strategien (IESDS) verlangt nicht nur, (i) dass alle Spieler rational sind, sondern auch, (ii) dass alle Spieler wissen, dass alle Spieler rational sind, (iii) dass alle Spieler wissen, dass alle Spieler wissen, dass alle Spieler rational sind, usw. ad infinitum. Das heißt, Rationalität muss **"common knowledge"** sein.
2) Die Reihenfolge der Eliminierung spielt bei streng dominierten Strategien für das Ergebnis keine Rolle.
3) Schwach dominierte Strategien dürfen nicht eliminiert werden!

4) Ein Strategie kann auch von einer “gemischten Strategie” (siehe unten) dominiert werden.

5) Eine Strategie heißt **rationalisierbar**, wenn sie mit den Annahmen Rationalität und Common Knowledge von Rationalität vereinbar ist. Eine streng dominierte Strategie ist **nicht rationalisierbar**, d.h., sie ist **nie eine beste Antwort**, ganz gleich, welche Strategien man von seinen Gegenspielern erwartet. Notwendige Bedingung für die Rationalisierbarkeit einer Strategie ist, dass sie den Prozess der IESDS überlebt.

6) Für 2-Personen-Spiele gilt, dass alle Strategien, die IESDS überleben, auch tatsächlich rationalisiert werden können (hinreichende Bedingung für Rationalisierbarkeit).

7) Leider überleben in den meisten Spielen viele oder sogar alle Strategien IESDS. In diesen Fällen sind sehr viele Ergebnisse rationalisierbar.

Beispiel:

1 \ 2	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0, 7	2, 5	7, 0	0, 1
a_2	5, 2	3, 3	5, 2	0, 1
a_3	7, 0	2, 5	0, 7	0, 1
a_4	0, 0	0, -2	0, 0	10, -3

Abb. 2.3: Rationalisierbare Ergebnisse

- b_4 und a_4 können eliminiert werden.
- Alle anderen Strategien sind rationalisierbar. Betrachte z.B. a_1: Spieler 1 kann a_1 durch die Kette $(a_1, b_3, a_3, b_1, a_1, b_3, a_3, b_1, \ldots)$ rationalisieren.
- Wie kann man a_2 oder b_2 rationalisieren?
- Es ist unmöglich, a_4 zu rationalisieren. Warum?
- Angenommen, B's Auszahlung bei (a_4, b_4) ist nicht -3, sondern $+1$. Kann a_4 dann rationalisiert werden?

2.5 Nash-Gleichgewicht

Definition 2.4 (Beste Antwort) *Die Strategie s_i von Spieler i ist eine (schwach) beste Antwort gegen die Strategien s_{-i} seiner Gegenspieler, wenn*

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall s_i' \in S_i$$

Ein **Gleichgewicht** ist eine stabile Situation, in der kein Spieler einer Anreiz hat, sein Verhalten zu verändern. Das motiviert die folgende Definition:

Definition 2.5 (Nash-Gleichgewicht) *Die Strategien $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ bilden ein Nash-Gleichgewicht, falls jede Strategie s_i^* eine beste Antwort gegen s_{-i}^* ist, d.h., wenn für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $s_i \in S_i$ gilt:*

$$u_i(s_1^*, .., s_i^*, .., s_n^*) \geq u_i(s_1^*, .., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, .., s_n^*) \ .$$

Beachten Sie:

1) Wir verlangen hier nur die schwache Ungleichheit.

2) Angenommen, die Spieler können sich vor dem Spiel darüber unterhalten, welche Strategien sie spielen werden. Diese Abstimmung ist jedoch nicht bindend. Frage:

Gibt es eine Strategienkombination, die **selbst-durchsetzend** ist, d.h., von der niemand einen Anreiz hat, abzuweichen? Wenn es eine solche Strategienkombination gibt, dann muss sie ein Nash-Gleichgewicht sein. Denn wenn eine Strategienkombination $(\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_n)$ kein Nash-Gleichgewicht ist, dann existiert wenigstens ein Spieler i und eine Strategie $\tilde{s}_i$, so dass

$$u_i(\hat{s}_1, .., \hat{s}_i, .., \hat{s}_n) < u_i(\hat{s}_1, .., \hat{s}_{i-1}, \tilde{s}_i, \hat{s}_{i+1}, .., \hat{s}_n) \; .$$

Also hat i einen Anreiz, von der Übereinkunft abzuweichen.

Wie findet man ein Nash-Gleichgewicht in einem 2-Personen-Spiel mit endlich vielen Strategien?

- Betrachte jede Strategie von Spieler 1 und überlege, welche Strategie von Spieler 2 dagegen eine beste Antwort ist.
- Betrachte jede Strategie von Spieler 2 und überlege, welche Strategie von Spieler 1 dagegen eine beste Antwort ist.
- Gibt es eine wechselseitig beste Antwort?

Bei n Spielern muss man diese Prozedur für alle n durchführen.

Beispiel:

1 \ 2	ℓ	m	r
O	0, 4	4, 0	5, 3
M	4, 0	0, 4	5, 3
U	3, 5	3, 5	6, 6

Abb. 2.4: Finden eines Nash-Gleichgewichts

Existiert ein Nash-Gleichgewicht?

Nicht notwendigerweise in reinen Strategien. Aber John Nash (1950) hat gezeigt, dass ein Nash-Gleichgewicht unter sehr allgemeinen Bedingungen existiert, wenn wir **gemischte Strategien** zulassen. Siehe unten, Satz 2.5.

Erwartungen

Kein Spieler weiß, welche Strategien seine Gegenspieler gewählt haben. Die optimale Strategie hängt also von den Erwartungen über die gewählten Strategien der anderen Spieler ab. Ein Nash-Gleichgewicht ist eine **Kombination von mit-**

einander konsistenten Erwartungen:

- Im Nash-Gleichgewicht ist die Strategie s_i^* von Spieler i optimal gegeben seine Erwartungen über die Strategie von Spieler j

  und

- für Spieler j ist es tatsächlich optimal sich entsprechend den Erwartungen von Spieler i zu verhalten, wenn er selbst korrekt erwartet, dass Spieler i die Strategie s_i^* wählen wird.

Beachten Sie, dass die zweite Eigenschaft bei rationalisierbaren Ergebnissen nicht gegeben sein muss. Dort kann es sein, dass die Strategie von Spieler i optimal ist, gegeben seine Erwartung über das Verhalten von Spieler j, aber das erwartete Verhalten von Spieler j ist nicht optimal gegeben die Strategie, die Spieler i tatsächlich wählt. In einem rationalisierbaren Ergebnis, das kein Nash-Gleichgewicht ist, hat wenigstens ein Spieler falsche Erwartungen.

2.6 Exkurs: IESDS und Nash-GG

Satz 2.2 *Wenn das Strategienprofil* $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ *ein Nash-Gleichgewicht ist, dann überleben alle* s_i^*, $i = 1, \ldots, n$, *IESDS.*

Beweis (durch Widerspruch): Angenommen, nicht alle s_i^* überleben IESDS. Sei j der erste Spieler dessen Gleichgewichtsstrategie eliminiert werden soll. Dann existiert eine Strategie $\hat{s}_j$, so dass

$$u_j(s_j^*, s_{-j}) < u_j(\hat{s}_j, s_{-j})$$

für alle s_{-j}, die noch nicht eliminiert wurden. Insbesondere gilt also:

$$u_j(s_j^*, s_{-j}^*) < u_j(\hat{s}_j, s_{-j}^*).$$

Aber das ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ ein Nash-GG ist. *Q.E.D.*

Satz 2.3 *Wenn durch IESDS alle Strategien bis auf* $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ *eliminiert werden, dann sind diese Strategien das eindeutige Nash-Gleichgewicht des Spiels.*

Beweis: Wir müssen nur noch zeigen, dass es sich bei dem Strategientupel $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ um ein Nash-GG handelt. Eindeutigkeit haben wir bereits, denn gäbe es ein zweites Gleichgewicht, hätte es IESDS ebenfalls überlebt (wegen Satz 2.4).

Angenommen, $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ ist kein Nash-GG. Dann existiert ein i und ein $\hat{s}_i$, so dass

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) < u_i(\hat{s}_i, s_{-i}^*).$$

Dieses $\hat{s}_i$ wurde aber in irgendeiner Stufe eliminiert. Also existiert ein s_i', so dass

$$u_i(\hat{s}_i, s_{-i}^*) < u_i(s_i', s_{-i}^*).$$

- Entweder $s_i' = s_i^*$, dann haben wir bereits den Widerspruch.
- Oder $s_i' \neq s_i^*$. Dann existiert ein s_i'', das s_i' in irgendeiner Stufe dominiert hat.
  - Entweder $s_i'' = s_i^* \;\Rightarrow\;$ Widerspruch
  - Oder $s_i'' \neq s_i^* \;\Rightarrow\; s_i'''$

Da es nur endlich viele Strategien gibt, müssen wir irgendwann zu einem Widerspruch kommen. $Q.E.D.$

2.7 Multiple Nash-Gleichgewichte

Leider gibt es oft mehrere Gleichgewichte. Beispiele:

Er \ Sie	Boxen	Ballett
Boxen	2, 1	0, 0
Ballett	0, 0	1, 2

Abb. 2.5: Kampf der Geschlechter

1 \ 2	Falke	Taube
Falke	-10, -10	5, 0
Taube	0, 5	1, 1

Abb. 2.6: Feigling ("Chicken"), Falke-Taube ("Hawk-Dove")

Ohne zusätzliche Information ist unklar, ob die Spieler überhaupt ein Nash-Gleichgewicht spielen werden, und wenn ja, welches.

Aber: Wenn es eine “offensichtliche” Strategienkombination gibt, die die Spieler spielen sollten, dann muss es sich um ein Nash-Gleichgewicht handeln.

Wann ist eine Strategienkombination “offensichtlich”?

2.6.1 Fokus-Punkte (Focal Points)

Schelling (1960): Bei vielen Koordinationsproblemen gibt es gesellschaftliche Normen oder Konventionen, die festlegen, welches Gleichgewicht gespielt wird.

Beispiele:

- **Das Städte-Spiel**
  - Teilen Sie die folgende Liste von Städten in zwei beliebige Gruppen auf: Berlin, Havanna, London, Moskau, Paris, Ottawa, Washington.
  - Schreiben Sie Ihre Aufteilung und Ihren Namen auf einen Zettel.
  - Wir greifen zwei Zettel zufällig heraus.
  - Wenn die beiden Zettel dieselbe Aufteilung der Städte aufweisen, bekommen die betreffenden Personen jeweils 5 EUR. Ansonsten gibt es nichts.

- **Ein Aufteilungsspiel**
  - Sie müssen 10 EUR zwischen sich selbst und einem Gegenspieler aufteilen.
  - Schreiben Sie auf einen Zettel, wieviel Sie für sich selbst beanspruchen. Vergessen Sie Ihren Namen nicht!
  - Wir sammeln die Zettel ein und ziehen zwei davon zufällig heraus.
  - Wenn die Summe der Forderungen kleiner oder gleich 10 EUR ist, bekommt jeder seine Forderung. Ansonsten bekommen beide nichts.
- **Normen:** Rechtsverkehr

2.6.2 Kommunikation vor dem Spiel

Wenn die Spieler vor dem Spiel miteinander kommunizieren können, können sie sich auf ein Gleichgewicht einigen, das damit zu einem Fokus-Punkt wird.

2.6.3 Pareto-Optimalität

Im folgenden Spiel gibt es zwei Gleichgewichte, aber es scheint offensichtlich, welches gespielt werden sollte.

1 \ 2	ℓ	r
O	100, 100	0, 0
U	0, 0	1, 1

Abb. 2.7: Pareto-Optimales Nash-Gleichgewicht

Ist es "offensichtlich" ein Pareto-effizientes Gleichgewicht zu spielen, falls dieses eindeutig ist?

Gegenbeispiel von Harsanyi und Selten (1988):

1 \ 2	ℓ	r
O	9, 9	0, 8
U	8, 0	7, 7

Abb. 2.8: Pareto-Effizienz und Risiko-Dominanz

Spieler 1 könnte sich denken:

- O ist sehr riskant, wenn nicht völlig sicher ist, dass Spieler 2 ℓ wählt.
- U führt zu einer nur unwesentlich kleineren Auszahlung, ist aber sehr viel sicherer.

Harsanyi und Selten argumentieren, dass das Nash-GG (U, r) das Nash-GG (O, l) **Risiko-dominiert** und deshalb gespielt werden sollte.

$\Rightarrow$ Potentieller Konflikt zwischen Pareto-Effizienz und Risiko-Dominanz.

Verschwindet dieser Konflikt, wenn sich die Spieler vor dem Spiel unterhalten können?

Aumann (1990): Nein!
Spieler 1 wird sich sagen: "Ganz gleich, welche Strategie ich spielen werde, ich sollte immer versuchen, Spieler 2 davon zu überzeugen, dass ich O spiele, damit er ℓ spielt."
Also enthält die Mitteilung von Spieler 1, dass er O spielen wird, keine neue Information.

$\Rightarrow$ Auch Kommunikation vor dem Spiel gibt keine Sicherheit, dass (O, l) gespielt wird.

2.8 Wann können wir erwarten, dass ein Nash-Gleichgewicht gespielt wird?

Es gibt zwei verschiedene Ansätze, mit denen Nash-Gleichgewichte (auch andere Gleichgewichte) gerechtfertigt werden können.

2.8.1 Rationalität und Nash-Gleichgewicht

Impliziert Rationalität plus Common Knowledge von Rationalität Nash-Gleichgewicht?

Nein! Dadurch wird nur impliziert, dass die Spieler rationalisierbare Strategien wählen. Das ist alles!

Aber nur ein Nash-Gleichgewicht hat die Eigenschaft, dass die **Erwartungen der Spieler miteinander konsistent** sind. Bei jeder Strategienkombination, die kein Nash-Gleichgewicht ist, macht wenigstens ein Spieler einen Fehler:

- entweder wählt er keine beste Antwort, gegeben seine Erwartungen,
- oder er wählt eine beste Antwort, aber seine Erwartungen sind falsch.

Wenn ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht existiert, kann man argumentieren, dass es von rationalen Spielern gespielt werden sollte, denn:

1) Nash-GG ist die einzige rationalisierbare Strategienkombination mit konsistenten Erwartungen.

2) Nash-GG ist die einzige Strategienkombination, die selbstdurchsetzend wäre, wenn sich die Spieler vorab über ihre Strategien unterhalten könnten.

Wenn es mehrere Nash-Gleichgewichte gibt, reicht diese Argumentation nicht mehr aus. Jetzt müssen wir zusätzliche Anforderungen an das Gleichgewichtskonzept stellen, bis nur noch ein Gleichgewicht übrig bleibt, dass alle die Anforderungen erfüllt. Beispiel für solche Verfeinerungen des Gleichgewichtskonzepts (equilibrium refinements): "Das Gleichgewicht eines symmetrischen Spiels sollte symmetrisch sein" oder "Das Gleichgewichtsergebnis sollte von keinem anderen Gleichgewichtsergebnis Pareto-dominiert werden". Harsanyi und Selten (1988)[1] entwickeln ein axiomatisches System, das für jedes Spiel ein eindeutiges Gleichgewicht als dasjenige auszeichnet, das von (hyper-)rationalen Spielern gespielt werden sollte.

[1] Harsanyi, John and Reinhard Selten, *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, Cambridge: MIT Press 1988

2.8.2 Lernen und Nash-Gleichgewichte

Dieser Ansatz geht davon aus, dass tatsächliche Spieler beschränkt rational sind, dass sie aber im Laufe der Zeit lernen und ihr Verhalten verbessern. Es kann gezeigt werden, dass viele (auch sehr einfache) Lernprozesse dazu führen, dass die Spieler ein Nash-Gleichgewicht spielen. Wenn es mehrere Nash-Gleichgewichte gibt, kann es sein, dass bestimmte (besonders plausible) Lernprozesse immer zu einem dieser Gleichgewichte führen.

Die evolutionäre Spieltheorie geht davon aus, dass Strategien genetisch festgelegt sind und vererbt werden. Hier wird gezeigt, dass nur solche Strategien evolutionär stabil sind, die ein (Nash-)Gleichgewicht bilden.

2.9 Anwendungen

2.9.1 Cournot-Duopol (Auguste Cournot, 1838):

- 2 Unternehmen produzieren ein homogenes Gut
- keine Fixkosten;
  identische, konstante Grenzkosten $c_1 = c_2 = c$
- simultane Wahl der Mengen, $x_1 \in R_+$, $x_2 \in R_+$
- Preis ergibt sich bei Gesamtproduktion $x = x_1 + x_2$ aus der inversen Nachfragefunktion:

$$P(x) = a - b \cdot (x_1 + x_2)$$

- Gewinnfunktion von Unternehmen i, $i \in \{1,\ 2\}$:

$$\pi_i \ = \ [a - b \cdot (x_i + x_j)] \cdot x_i - c \cdot x_i$$

Bestimmung der Reaktionsfunktion (Beste-Antwort-Funktion) von Unternehmen 1:

$$\max_{x_1} [a - b \cdot (x_1 + x_2)] \cdot x_1 - c \cdot x_1$$

Bedingung 1. Ordnung für Maximum:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = a - b \cdot (x_1 + x_2) - bx_1 - c = 0$$

Reaktionsfunktion:

$$x_1^*(x_2) = R_1(x_2) = \frac{1}{2b}(a - c - bx_2)$$

Analog für Unternehmen 2:

$$x_2^*(x_1) = R_2(x_1) = \frac{1}{2b}(a - c - bx_1)$$

Nash-Gleichgewicht muss wechselseitig beste Antwort sein, d.h.

$$x_1 = \frac{1}{2b}(a - c - bx_2)$$
$$x_2 = \frac{1}{2b}(a - c - bx_1)$$

müssen gleichzeitig erfüllt sein. Auflösen ergibt:

$$x_1^* \ = \ \frac{a-c}{3b} \ = \ x_2^*$$

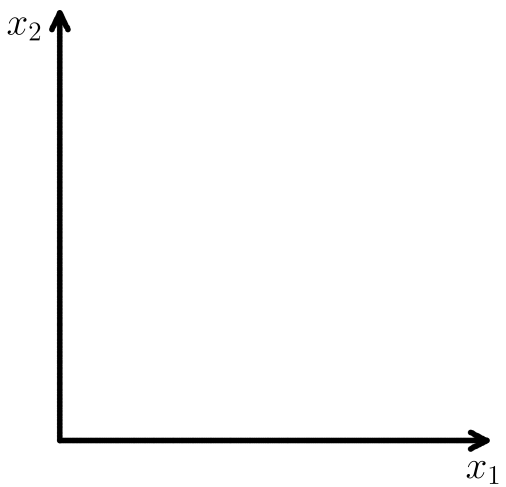

Abb. 2.9: Reaktionsfunktionen und Cournot-Gleichgewicht

Der Schnittpunkt der beiden Reaktionsfunktionen ist das Cournot-Gleichgewicht.

Dynamische Interpretation des Cournot-GG

Das Cournot-Gleichgewicht ist früher oft als Ergebnis eines dynamischen Anpassungsprozesses interpretiert worden:

- Jedes Unternehmen erwartet, dass der Konkurrent in der nächsten Periode dieselbe Mengenentscheidung wie in dieser Periode treffen wird.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ x_1^{t+1} &= R_1(x_2^t) \\ \Rightarrow\ x_2^{t+1} &= R_2(x_1^t) \end{aligned}$$

  Diese Gleichungen beschreiben ein dynamisches System. In unserem linearen Beispiel konvergiert dieses System zum Cournot-Gleichgewicht.

- Diese Interpretation ist jedoch nicht überzeugend: Jedes Unternehmen bildet in jeder Periode systematisch falsche Erwartungen, ohne im Zeitablauf zu lernen. Da bessere Erwartungsbildung zu höherem Gewinn führt, hat jedes Unternehmen einen starken Anreiz, seine Erwartungen zu verbessern.

- Nur konsistente Erwartungen können nicht weiter verbessert werden.

Das Cournot-Nash-Gleichgewicht ist die einzige Strategienkombination, die iterierte Eliminierung von streng dominierten Strategien überlebt. Siehe Übung.

Wenn die Zahl der Spieler im Cournot-Oligopol gegen ∞ geht, dann konvergiert der Gleichgewichtspreis gegen die Grenzkosten. Siehe Übung.

2.9.2 **Bertrand-Duopol** (Joseph Bertrand, 1883):

- Modell wie bei Cournot, aber:
- Unternehmen wählen Preise, $p_1 \in R_+$, $p_2 \in R_+$.
- Alle Konsumenten kaufen beim Anbieter mit dem niedrigsten Preis, der die gesamte Nachfrage zu diesem Preis bedienen muss.
- Bei gleichen Preisen teilen sich die Konsumenten 50:50 zwischen den beiden Anbietern auf.

Satz 2.4 *Es existiert ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht, in dem die Unternehmen $p_1 = p_2 = c$ wählen. Jedes Unternehmen bedient den halben Markt und macht Nullgewinne.*

Beweis:

1) Es kann für kein Unternehmen optimal sein, $p_i < c$ zu wählen, weil es dann Verluste macht.

2) Kann es ein Gleichgewicht sein, dass $p_i > p_j > c$?
Nein, denn Unternehmen i kann nichts verkaufen. Es würde sich besser stellen, wenn es $p_i = p_j - \epsilon$ setzte.

3) Kann es ein Gleichgewicht sein, dass $p_i > p_j = c$?
Nein. Zwar kann sich Unternehmen i nicht mehr verbessern. Aber, Unternehmen j könnte sich besserstellen, wenn es seinen Preis auf $p_i - \epsilon$ erhöht.

4) Also ist der einzige verbleibende Kandidat für ein Gleichgewicht

$$p_i = p_j = c$$

5) Ist das ein Gleichgewicht?
Ja, denn gegeben $p_i = c$ ist es optimal $p_j = c$ zu wählen, obwohl es nur Nullgewinne gibt:

- $p_j < c$ führt zu Verlusten;
- $p_j > c$ führt ebenfalls zu Nullgewinnen, also keine Verbesserung.

Q.E.D.

Bemerkungen:

1) Hier ist das eindeutige Nash-GG ein Gleichgewicht in schwach dominierten Strategien.
2) Das Marktergebnis ist dasselbe wie bei vollkommener Konkurrenz: Preis gleich Grenzkosten, Nullgewinne.
3) Manche Autoren sprechen von Bertrand- und Cournot-Gleichgewichten. Besser: Nash-Gleichgewichte im Cournot- bzw. Bertrand-Spiel.
4) Das Resultat wird **Bertrand-Paradox** genannt, weil es unplausibel scheint, dass bei nur zwei Anbietern keine Marktmacht herrscht. Das Paradox löst sich auf, wenn man wiederholte Interaktion betrachtet.
5) Das extreme Resultat beruht auf der extremen Preiselastizität der Nachfrage bei homogenem Gut. Siehe Gibbons (1992, S. 21) für ein Bertrand-Spiel mit differenzierten Gütern.
6) Es gibt Marktsituationen, die durch das Bertrand-Modell sehr gut beschrieben werden. Beispiel: Bieterwettbewerb bei Auktion (z.B. für öffentlichen Auftrag).
7) Hausaufgabe: Welche Gleichgewichte gibt es, wenn es eine kleinste Geldeinheit für den Preis gibt (z.B. 1 Pfennig)? Nehmen Sie an, dass $c = 0$.

2.9.3 Betrand Duopol mit differenzierten Gütern

Betrachten wir jetzt ein Duopol, in dem beide Unternehmen Preise setzen, in dem die Güter aber differenziert sind. Die Nachfragefunktionen der beiden Unternehmen sind:

$$x_1(p_1, p_2) \;=\; a - p_1 + bp_2$$
$$x_2(p_1, p_2) \;=\; a - p_2 + bp_1$$

Beide Unternehmen haben dieselbe Kostenfunktion

$$c(x_i) \;=\; cx_i$$

Wir nehmen an, dass $0 < b < 1$ und $a > (1-b)c$ (warum?).

Unternehmen $i \in \{1, 2\}$ maximiert:

$$\max_{p_i \geq 0} \Pi_i(p_i, p_j) \;=\; p_i x_i(p_i, p_j) - c x_i(p_i, p_j) \;=\; (p_i - c)[a - p_i + bp_j]$$

Die BEO für ein Gewinnmaximum verlangt:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} \;=\; a - 2p_i + bp_j + c \;=\; 0$$

Daraus ergeben sich die Reaktionsfunktionen:

$$p_i \;=\; \frac{1}{2}(a + bp_j + c)$$
$$p_j \;=\; \frac{1}{2}(a + bp_i + c)$$

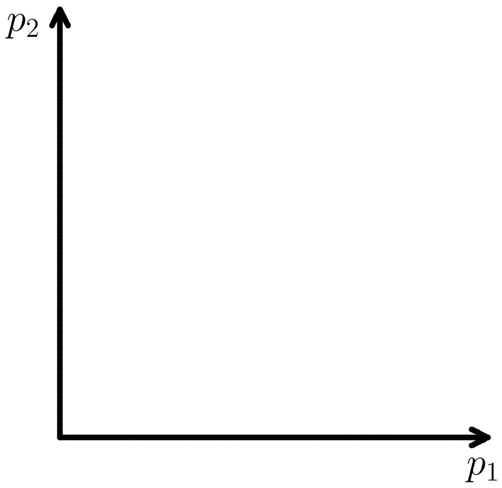

Abb. 2.10: Reaktionsfunktionen bei differenzierten Gütern

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt die Gleichgewichtspreise

$$p_i^* = p_j^* = \frac{a+c}{2-b}$$

Bemerkungen:

1. Der Preis ist höher als die Grenzkosten (zeigen!), d.h., die Unternehmen machen positive Gewinne.

2. Im Gegensatz zum Standard Bertrand Modell ist die Preiselastizität der Nachfrage ist für jedes Unternehmen kleiner als unendlich.

3. Die Strategievariablen der beiden Firmen sind strategische Komplemente: Je höher der Preis meines Konkurrenten, um so höher ist mein eigener optimaler Preis.

4. Im Cournot-Modell sind die Strategievariablen der beiden Firmen strategische Substitute: Je höher die Menge meines Konkurrenten, um so geringer ist meine eigene optimale Menge.

5. Wenn $b = 0$, setzen beide Unternehmen den Monopolpreis (warum?).

2.9.4 Ein Bankenzusammenbruch

Eine Bank finanziert ein langfristiges Projekt, das K Geldeinheiten kostet und $R > K$ Geldeinheiten zum Zeitpunkt 2 auszahlt. Die Bank kann sich aber nur kurzfristig finanzieren. Sie hat Einlagen von zwei Investoren in Höhe von je $K/2$. Jeder Investor kann entweder $K/2$ bereits zum Zeitpunkt 1 zurückverlangen oder $R/2$ zum Zeitpunkt 2. Wenn ein Investor sein Geld in Periode 1 zurückverlangt, muss die Bank das Projekt vorzeitig liquidieren und kann nur r einnehmen, $r < K < R$.

1 \ 2	rush	wait
rush	$\frac{r}{2}, \frac{r}{2}$	$\frac{K}{2}, r - \frac{K}{2}$
wait	$r - \frac{K}{2}, \frac{K}{2}$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$

Abb. 2.11: Möglicher Bankenzusammenbruch

Hier gibt es zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien: (rush,rush) und (wait,wait). Der Bankenzusammenbruch wird durch die Erwartung der Sparer ausgelöst, dass die anderen Sparer ihr Geld abziehen werden. Gegegeben, dass die anderen ihr Geld abziehen, sollte ich auch mein Geld abziehen, selbst wenn dann die Bank zusammenbricht.

Betrachten Sie jetzt eine etwas andere Situation. Die Forderung von Spieler 1 ist durch ein Sicherungsrecht abgesichert und hat Priorität. Wenn das Projekt vorzeitig liquidiert wird, wird in jedem Fall zuerst Spieler 1 ausgezahlt, dann erst Spieler 2.

1 \ 2	rush	wait
rush	$\frac{K}{2},\ r-\frac{K}{2}$	$\frac{K}{2},\ r-\frac{K}{2}$
wait	$\frac{K}{2},\ r-\frac{K}{2}$	$\frac{R}{2},\ \frac{R}{2}$

Abb. 2.12: Spieler 1 hat Sicherungsrecht

In diesem Fall gibt es immer noch zwei Nash-Gleichgewichte. Aber nur eines der beiden verwendet keine schwach dominierten Strategien: (wait,wait). Keiner der Spieler kann seine Situation durch vorzeitige Kündigung verbessern. Darum ist es jetzt sehr viel unwahrscheinlicher, dass es zu einem Bankenzusammenbruch kommt.

2.9.5 Politischer Wettbewerb

Das folgende Modell geht auf Hotelling zurück. Es gibt zwei Parteien, A und B. Jede Partei interessiert sich ausschließlich dafür, die nächste Wahl zu gewinnen. Jeder Wähler hat im Links-Rechts-Spektrum $[0, 1]$ eine eindeutige Position. Dabei ist die Position "0" ganz links und die Position "1" ganz rechts. Die Wähler sind über dem Interval $[0, 1]$ gleich verteilt.

Die beiden Parteien, müssen sich vor der Wahl auf eine Position im Links-Rechts Spektrum festlegen und diese Position nach der Wahl auch umsetzen. Wenn die Partei, die die Wahl gewinnt, die Position $k \in [0, 1]$ vertritt, erleidet ein Wähler mit Position $x \in [0, 1]$ einen Nutzenverlust in Höhe von $\mid x - k \mid$. Darum wird jeder Wähler die Partei wählen, die seiner Position am nächsten steht.

Diejenige Partei, die die meisten Stimmen auf sich vereinigt, wird gewählt und bekommt die Auszahlung R. Der Wahlverlierer bekommt eine Auszahlung von 0. Bei Stimmengleichheit gewinnt jede Partei mit Wahrscheinlichkeit 0.5.

Die beiden Parteien müssen zeitgleich und unabhängig voneinander entscheiden, welche Positionen k_A und k_B sie bei der Wahl vertreten wollen.

- Was ist das eindeutige Nash-Gleichgewicht in diesem Spiel?

- Was ändert sich an diesem Resultat, wenn die Verteilung der Wähler keine Gleichverteilung ist?

Nehmen Sie jetzt an, dass es beiden Parteien nicht um das Gewinnen der Wahl, sondern vor allem um die Politik geht. Partei A vertritt die Position $x_A < 0.5$ und Partei B vertritt die Position $x_B > 0.5$. Wenn von der gewählten Regierung (egal ob diese von Partei A oder B gestellt wird) die Politik $k \in [0, 1]$ durchgeführt wird, sind die politischen Auszahlungen der beiden Parteien

$$\begin{aligned} U^A &= -|k - x_A| \\ U^B &= -|k - x_B| \end{aligned}$$

Zusätzlich erhält diejenige Partei, die die Wahl gewinnt, die Auszahlung ϵ, die jedoch sehr klein sein soll. Die Parteien müssen sich vor der Wahl auf eine Politik k_A und k_B festlegen. Diese Politiken können von ihren eigentlichen Position abweichen, müssen aber nach der Wahl "eins-zu-eins" umgesetzt werden. Die Wähler entscheiden wie oben. Die Partei mit der höchsten Stimmenzahl gewinnt und setzt ihre Politik k_i um. Bei Stimmengleichheit wird die Politik $k = \frac{1}{2}[k_A + k_B]$ realisiert und jeder bekommt die Zusatzauszahlung $\frac{\epsilon}{2}$.

- Bestimmen Sie die Menge der Nash Gleichgewichte für dieses Spiel.

2.10 Gemischte Strategien

Ein Zerstörer (Spieler 1) liegt im Westen, ein feidliches U-Boot (Spieler 2) im Osten einer Insel. Der Zerstörer möchte das U-Boot treffen, um es zu zerstören, das U-Boot möchte dem Zerstörer ausweichen. Beide müssen entscheiden, ob sie die Insel im Norden oder Süden umfahren:

1 \ 2	Norden	Süden
Norden	1, -1	-1, 1
Süden	-1, 1	1, -1

Abb. 2.13: U-Boot Jagd

In diesem Spiel existiert kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

Definition 2.6 (Gemischte Strategie) *Betrachte ein Spiel in Normalform G mit endlichen Strategienräumen S_i. Sei $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{iK_i}\}$. Eine gemischte Strategie für Spieler i ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{iK_i})$ über S_i, wobei $0 \leq \sigma_{ik} \leq 1$ für $k = 1, \ldots, K_i$ und $\sigma_{i1} + \ldots + \sigma_{iK_i} = 1$.*

In der “U-Boot Jagd” ist das einzige Nash-Gleichgewicht, dass beide Spieler mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Norden bzw. Süden wählen.

Beweis: Sei $p \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, mit der Spieler 1 (der Zerstörer) Norden wählt, und $q \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit mit der Spieler 2 (das U-Boot) Norden wählt.

Angenommen, der Zerstörer wählt Norden. Dann ist seine erwartete Auszahlung:

$$u_1(N) = q \cdot 1 - (1-q) \cdot 1 = 2q - 1$$

Angenommen der Zerstörer wählt Süden. Dann ist seine erwartete Auszahlung:

$$u_1(S) = -q \cdot 1 + (1-q) \cdot 1 = 1 - 2q$$

$\Rightarrow$ Der Zerstörer sollte Norden wählen, falls

$$2q - 1 \geq 1 - 2q \quad \Leftrightarrow \quad q \geq \frac{1}{2}$$

Wenn $q = \frac{1}{2}$, ist der Zerstörer gerade indifferent zwischen Norden und Süden.

Analog gilt für das U-Boot: Es sollte Norden wählen, wenn $p \leq \frac{1}{2}$, wobei es bei $p = \frac{1}{2}$ gerade indifferent ist. $Q.E.D.$

Graphische Darstellung:

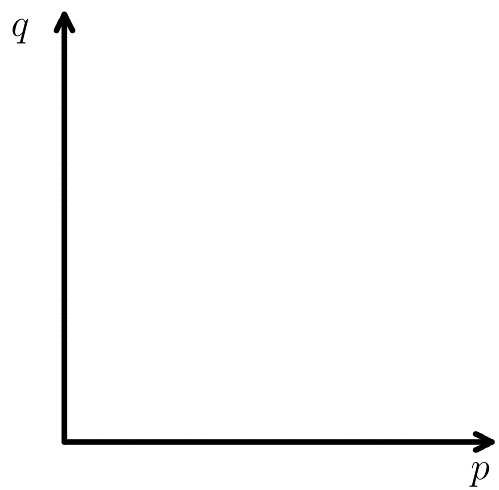

Abb. 2.14: Beste-Antwort-Korrespondenz bei der U-Boot Jagd

Einziger Schnittpunkt ist $p = q = \frac{1}{2}$.

Bemerkungen:

1) Eine reine Strategie ist nur der Extremfall einer gemischten Strategie: die Wahrscheinlichkeit einer Strategie ist 1, die aller anderen ist 0.

2) Der **Träger** einer gemischten Strategie ist die Menge all der Aktionen, die mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt werden. Eine gemischte Strategie ist eine beste Antwort gegen ein (gemischtes) Strategienprofil der Mitspieler genau dann, wenn jedes Element des Trägers eine (reine) beste Antwort ist. (Warum?)

3) Beachten Sie, dass die Spieler bei gemischten Strategien nur unabhängig voneinander randomisieren können.

4) Eine gemischte Strategie kann eine reine Strategie streng dominieren:

1 \ 2	ℓ	r
O	3, -	0, -
M	0, -	3, -
U	1, -	1, -

Abb. 2.15: Dominanz einer gemischten Strategie

U wird weder von O noch M dominiert, aber die gemischte Strategie, die O mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und M mit $\frac{1}{2}$ spielt, dominiert U streng!

5) Eine reine Strategie von Spieler 1, die gegen keine reine Strategie von Spieler 2 eine beste Antwort ist, kann doch gegen eine gemischte Strategie von Spieler 2 eine beste Antwort sein:

1 \ 2	ℓ	r
O	3, -	0, -
M	0, -	3, -
U	2, -	2, -

Abb. 2.16: Beste Antwort gegen gemischte Strategie

Wenn Spieler 2 ℓ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und r mit $\frac{1}{2}$ spielt, ist U eine beste Antwort von Spieler 1.

Bestimmung aller Nash-Gleichgewichte

Betrachte erneut den “Kampf der Geschlechter”, aber diesmal mit allgemeinen Auszahlungen:

1 \ 2	Bo	Ba
Bo	$X_1,\ X_2$	0, 0
Ba	0, 0	$Y_1,\ Y_2$

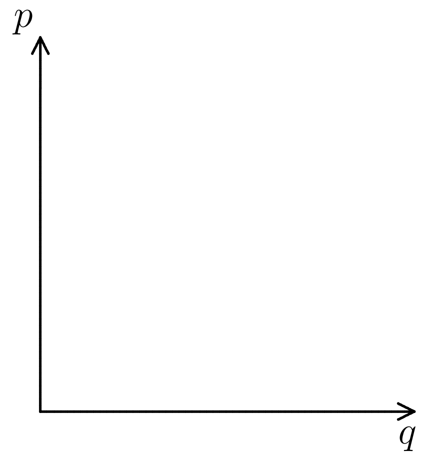

Abb. 2.17: Alle Nash-GGe im Kampf der Geschlechter

Sei p die Wahrscheinlichkeit, mit der Spieler 1 zum Boxen geht, und q die W., mit der Spieler 2 zum Boxen geht.

$$u_1(Bo) = q \cdot X_1 + (1-q) \cdot 0 = qX_1$$

$$u_1(Ba) = q \cdot 0 + (1-q) \cdot Y_1 = (1-q)Y_1$$

$$u_1(Bo) \geq u_1(Ba) \quad \Leftrightarrow \quad qX_1 \geq (1-q)Y_1 \quad \Leftrightarrow \quad q \geq \frac{Y_1}{X_1+Y_1}$$

Analog:

$$u_2(Bo) \geq u_2(Ba) \quad \Leftrightarrow \quad pX_2 \geq (1-p)Y_2 \quad \Leftrightarrow \quad p \geq \frac{Y_2}{X_2 + Y_2}$$

Bemerkungen:

1) Hier gibt es zwei Nash-GGe in reinen Strategien und eines in gemischten Strategien.

2) Im gemischten Nash-GG wählt Spieler 1 "Boxen" mit Wahrscheinlichkeit $p^* = \frac{Y_2}{X_2+Y_2}$ und Spieler 2 die Strategie "Boxen" mit Wahrscheinlichkeit $q^* = \frac{Y_1}{X_1+Y_1}$. Beachten Sie, dass im Gleichgewicht p^* unabhängig von den Auszahlungen X_1, Y_1 von Spieler 1 ist: wenn X_1 steigt, wird Spieler 1 deshalb nicht mit größerer Wahrscheinlichkeit zum Boxen gehen. p^* hängt nur von den Auszahlungen X_2, Y_2 des Gegenspielers ab. Jeder Spieler wählt seine Randomisierungswahrscheinlichkeit so, dass der andere Spieler indifferent gehalten wird!

3) Man kann zeigen, dass für generische Spiele gilt: Wenn ein Spiel eine endliche Zahl von Gleichgewichten hat, dann ist die Anzahl der Nash-Gleichgewichte ungerade. Nützlicher Test, ob man alle Nash-GGe gefunden hat.

Interpretation von gemischten Strategien

Gemischte Strategien sind oft als "unnatürlich" kritisiert worden. Beachten Sie, dass ein Spieler im Gleichgewicht indifferent zwischen der gemischten Strategie und den reinen Strategien im Träger der gemischten ist.

Mögliche Rechtfertigungen für gemischte Strategien:

1) In vielen Spielen wird von "guten Spielern" tatsächlich randomisiert (z.B. beim Elfmeter im Fußball).

2) Man kann sich vorstellen, dass jeder Spieler eine reine Strategie spielt, dass sein Gegenspieler aber unsichere Erwartungen über diese Strategie hat.

   Dieses Argument ist jedoch im Widerspruch zur Philosophie des Nash-Gleichgewichts, weil hier die Erwartungen miteinander konsistent und korrekt sein sollen.

3) Es gibt unvollständige Information über die Auszahlungsfunktion der Gegenspieler. Jeder Spieler wählt eine reine Strategie, die von seinem "Typ" abhängt, aber sein Typ ist dem Gegenspieler nicht bekannt.

   Man kann zeigen: Ein gemischtes Gleichgewicht ist der Grenzwert einer Folge von Gleichgewichten in reinen Strategien eines Spiels mit unvollständiger Information, wenn die Informationsunvollständigkeit gegen 0 geht. Harsanyi (1973): Purification Theorem.

2.11 Wer ruft die Polizei?

Sie werden nachts durch lautes Schreien auf der Straße geweckt. Sie machen das Licht an, gehen zum Fenster und beobachten eine gefährliche Schlägerei zwischen zwei Männern. Sie beobachten auch, dass in $N-1$ anderen Wohnungen das Licht angegangen ist und Nachbarn zum Fenster gekommen sind. Jeder der N Nachbarn muss entscheiden, ob er die Polizei anruft. In diesem Fall muss er auch als Zeuge aussagen. Jeder der Nachbarn wäre bereit, die Kosten des Anrufs und der Zeugenaussage auf sich zu nehmen, damit die Polizei die Schlägerei beendet, aber jeder Nachbar hätte es noch lieber, wenn ein anderer Nachbar das erledigt.

- Spieler: N Nachbarn
- Strategien: "Anrufen", "Schweigen"
- Auszahlungen von Spieler $i \in \{1, \ldots, N$:
  - Wenn niemand die Polizei anruft: $U_i = 0$
  - Wenn i nicht die Polizei anruft, aber wenigstens ein anderer anruft: $U_i = v$
  - Wenn i die Polizei anruft: $U_i = v - c$

  Es gilt $v > c > 0$.

Gibt es ein Gleichgewicht in reinen Strategien?

Gibt es ein symmetrisches Gleichgewicht in reinen Strategien?

Gibt es ein symmetrisches Gleichgewicht in gemischten Strategien?

In einem symmetrischen, gemischten GG ruft jeder Spieler die Polizei mit derselben Wahrscheinlichkeit $p^* \in (0,1)$. Also muss jeder Spieler indifferent sein, ob er anruft oder nicht. Darum muss gelten:

$$\begin{aligned} v - c \;=\; & 0 \cdot W(\text{niemand sonst ruft an}) \\ & + v \cdot W(\text{wenigstens ein anderer ruft an}) \end{aligned}$$

bzw.:

$$\begin{aligned} v - c \;=\; & 0 \cdot W(\text{niemand sonst ruft an}) \\ & + v \cdot (1 - W(\text{niemand sonst ruft an})) \end{aligned}$$

bzw.:

$$c = v \cdot W(\text{niemand sonst ruft an})$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der anderen anruft ist $(1-p^*)^{N-1}$. Also muss im GG gelten:

$$\frac{c}{v} = (1-p^*)^{N-1}$$

bzw.:

$$p^* = 1 - \left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{N-1}}$$

Beachten Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler i die Polizei ruft

- steigt mit v
- fällt mit c
- fällt mit N

Wie verändert sich die W., dass die Polizei vor irgendjemandem gerufen wird, wenn N steigt?

$$W(\text{jemand ruft an}) = 1 - W(\text{keiner ruft an})$$

Die W., dass niemand anruft, ist gleich der W., dass i nicht anruft <u>und</u> dass kein anderer $j \neq i$ anruft.

$$\begin{aligned} W(\text{keiner ruft an}) &= W(i \text{ ruft nicht an}) \\ &\quad \cdot W(\text{niemand sonst ruft an}) \end{aligned}$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung wissen wir, dass

$$W(\text{niemand sonst ruft an}) = (1 - p^*)^{N-1} = \frac{c}{v}$$

Dieser Ausdruck ist also unabhängig von N.

Wir wissen auch, dass

$$W(i \text{ ruft nicht an}) = 1 - p^* = \left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{N-1}}$$

mit N steigt.

Also fällt die Wahrscheinlichkeit, dass die Polizei gerufen wird mit der Zahl der Zeugen!

2.12 Existenz von Nash-Gleichgewichten

Unter relativ schwachen hinreichenden Bedingungen existiert wenigstens ein Nash-Gleichgewicht:

Satz 2.5 (Existenz I) *Jedes Normalform-Spiel mit einer endlichen Anzahl von Spielern und endlichen Strategienräumen hat wenigstens ein Nash-Gleichgewicht in reinen oder gemischten Strategien.*

Satz 2.6 (Existenz II) *Betrachte ein Normalform-Spiel mit einer endlichen Anzahl von Spielern und nicht-leeren, kompakten Strategienräumen, die Teilmengen von euklidischen Räumen sind.*

(a) Wenn die Auszahlungsfunktionen $u_i(s)$ stetig in s sind, dann existiert ein Nash-Gleichgewicht in reinen oder gemischten Strategien.

(b) Wenn die Strategienräume zusätzlich konvex und die Auszahlungsfunktionen $u_i(s)$ zusätzlich quasi-konkav in s sind, dann existiert ein reines Nash-Gleichgewicht.

Bemerkungen:

1) Existenzsätze zeigen, dass in einer großen Klasse von Spielen Nash-Gleichgewichte existieren.

2) Selbst wenn die Auszahlungsfunktionen nicht stetig sind, existieren in vielen Fällen Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien (Dasgupta-Maskin, 1986).

3) Existenzsätze sind wichtig, denn:

   a) Solange wir nicht wissen, ob Nash-GG existieren, ist es wenig sinnvoll, über die allgemeinen Eigenschaften solcher Gleichgewichte nachzudenken.

   b) Wenn Nash-GG in natürlichen Spielen nicht existieren würden, dann wäre etwas faul mit unserer interpersonellen Entscheidungstheorie. Wie sollten sich rationale Individuen dann verhalten?

Beweisskizze:

Der Beweis verwendet ein **Fixpunkt-Argument**.

Zur Illustration betrachte den folgenden Fixpunktsatz von Brouwer:

> **Satz 2.7 (Brouwer)** *Sei $A \subset R^N$ eine nichtleere, kompakte und konvexe Menge und $f : A \to A$ eine stetige Funktion von A nach A. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h., es existiert ein x, so dass $f(x) = x$.*

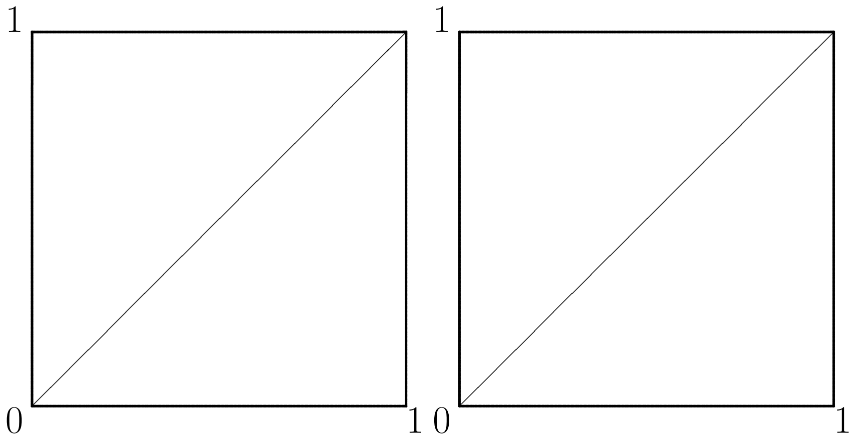

Abb. 2.18: Brouwers Fixpunktsatz

Definition 2.7 (Obere Halbstetigkeit) *Sei* $A \subset R^N$ *und* $Y \subset R^K$*, wobei* Y *eine kompakte Menge ist. Eine Korrespondenz* $f : A \to Y$ *ist oberhalb halbstetig, wenn sie einen abgeschlossenen Graph hat. (Wenn* Y *nur abgeschlossen aber nicht beschränkt ist, ist die Sache etwas komplizierter, wird hier aber nicht gebraucht).*

Satz 2.8 (Kakutani) *Sei* $A \subset R^N$ *eine nichtleere, kompakte und konvexe Menge und* $f : A \to A$ *eine oberhalb halbstetige Korrespondenz von* A *nach* A *mit der Eigenschaft, dass die Menge* $f(x) \subset A$ *eine nicht-leere und konvexe Menge für jedes* $x \in A$ *ist. Dann hat* f *einen Fixpunkt, d.h., es existiert ein* x*, so dass* $x \in f(x)$*.*

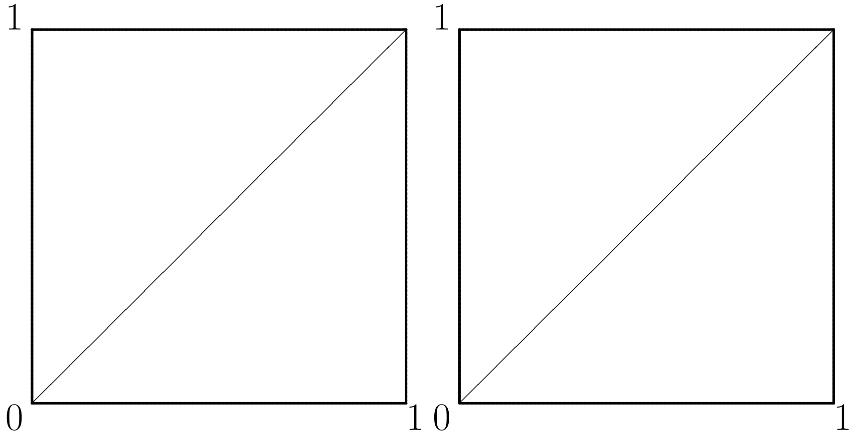

Abb. 2.19: Kakutanis Fixpunktsatz

Wir skizzieren den Beweis nur für Satz 2.6.

Sei σ_i eine gemischte Strategie von Spieler i und Σ_i die Menge aller gemischten Strategien. Beachten Sie, dass Σ_i eine nicht-leere, kompakte und konvexe Teilmenge des R^K ist, wobei K die Anzahl von Spieler i's reinen Strategien ist.

Definiere die **Beste-Antwort-Korrespondenz**

$$B_i : \Sigma_{-i} \to \Sigma_i$$

für Spieler i:

$$B_i(\sigma_{-i}) = \arg\max_{\sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Man kann zeigen, dass diese Korrespondenz unter den Bedingungen der Sätze 2.6 und 2.7 oberhalb halbstetig ist und dass $B_i(\sigma_{-i})$ nicht-leer und konvex ist für alle $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$.

Betrachte jetzt die Korrespondenz $B : \Sigma \to \Sigma$ definiert durch:

$$B(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = B_1(\sigma_{-1}) \times \cdots \times B_n(\sigma_{-n})$$

Diese Korrespondenz ordnet also jedem möglichen Strategienprofil das Profil der besten Antworten gegen dieses Strategienprofil zu.

Ein Fixpunkt dieser Korrespondenz ist also eine Strategienkombination mit der Eigenschaft, dass jede Strategie in dieser Kombination eine beste Antwort gegen alle anderen Strategien in dieser Kombination ist. $\Rightarrow$ Nash-GG.

Wenn wir zeigen können, dass die Korrespondenz B einen Fixpunkt hat, dann wissen wir, dass auch ein Nash-Gleichgewicht existiert.

Überprüfung der Bedingungen von Kakutanis Fixpunktsatz:

Bedingungen sind erfüllt
$\Rightarrow$ Fixpunkt existiert
$\Rightarrow$ Nash-GG existiert.